

# Extremális struktúrák

## OTKA zárójelentés, K 69062

Pályázat-vezető: Simonovits Miklós

2011 szept 29

**Résztvevők, eredetileg:** T. Sós Vera, akadémikus, Szemerédi Endre, akadémikus, Füredi Zoltán akadémikus, Győri Ervin, a tudományok doktora, Elek Gábor a tudományok doktora, és témavezetőként Simonovits Miklós (akadémikus).

Menetközben csatlakozott a pályázathoz egy tehetséges fiatal kutató, Patkós Balázs is. Patkós Balázs csatlakozását két témája is indokolta, a véletlen gráfok iránti érdeklődése, eddigi kutatása, eredményei, illetve az extremális struktúrák iránti érdeklődése és idevonatkozó eredményei. Csatlakozásának engedélyeztetését kérelmeztük, az engedélyt az OTKA irodától, Hunyadfalvi Zoltán 2010 március 9-én megkapott levelében kaptuk meg.

---

Az alábbiakban a teljes 4 éves periódusról számolunk be. Elsősorban a korábban elkezdett kutatásainkat folytattuk, ez elsősorban a nagyobb összefüggő kutatási területeinkre vonatkozik, az extremális gráfelmélet és hipergráfelmélet centrális kérdéseire. Ezek között szerepelnek:

1. **Klasszikus Extremális és Ramsey problémák megoldása** gráfokra, hipergráfokra, ill. ezekkel rokon problémák.
2. A **Szemerédi Regularitási Lemma alkalmazásai** gráfelméletben,
3. az **extremális és Ramsey típusú kérdések kapcsolata**, ezek kapcsolata a kvázivéletlenséggel, illetve a Regularitási Lemmával, annak használata általában, és elkerülhetősége, szerepe a "tulajdonság-tesztelésben",
4. Az extrém gráfelmélettel szoros kapcsolatban álló Erdős-Kleitman-Rothschild típusú tételek
5. **„Modern Gráfelmélet:”**
  - (a) Gráf-jelenségek leírása részgráfok számolásával,
  - (b) a gráflimesz vizsgálata, alkalmazásai

- (c) Gráf-jelenségek leírása analízisbeli módszerekkel
  - (d) Hasonlóságok és különbségek a sűrű és ritka gráfok limesz-elméletében.
6. **„Sporadikus kérdések:”** olyan kérdések kutatása, amelyek látszólag elszigetelt problémákra vonatkoznak, valójában azonban újszerű jelenségek felfedezéséhez vezethetnek. (Ez néha szorosan kapcsolódik az 1. ponthoz.)
- (a) Hipergráf extrém tételek,
  - (b) Degenerált extrém gráf tételek.
  - (c) Színezési problémák.
  - (d) Kombinatorikus metszettételek
  - (e) Általánosított metszettételek (pl vektorterek altereire vonatkozóak).
  - (f) Kombinatorikus geometriai, ill. egyéb geometriai kérdések.

Emellett azonban több új típusú kérdések, témák kutatásába is belekezdünk.

A beszámolót a 2. ponttal kezdjük, mert ez a kutatásaink igen nagy részében centrális szerepet játszik. Ezután áttérünk a gráf-limesz elméletre, mert ez szorosan kapcsolódik a Regularitási Lemmához. Végül visszatérünk a „klasszikus” témákra.

## 1. A Regularitási Lemma alkalmazásai

Területünkön, az Extremális struktúrák elméletében kiemelkedően fontos szerepet játszik a Szemerédi Regularitási Lemma, alkalmazásai a legkülönbözőbb kombinatorikai ill. kombinatorikus számelméleti kérdésekben, a "property Testing"-ben, illetve a gráf-limesz és a körülötte kialakult elméletekben.

Az általunk kutatott témák részben klasszikus gráfelméletiek, azon belül első sorban extrémális gráfelméletiek, illetve Ramsey típusúak, (bár gyakran kitérünk olyan témákra is, amelyek nem kapcsolódnak, vagy legalábbis nem közvetlenül kapcsolódnak ezekhez). Témáinkat a használt módszereink is összekötik, melyek között az egyik a Szemerédi Regularitási Lemma, mely napjainkban vitathatatlanul a modern Diszkrét Matematika egyik legfontosabb eszközévé vált. Alkalmas arra, hogy a determinisztikus, de véletlenszerű struktúrákat kezelje, leírja.

Mi is ezekkel a módszerekkel oldottunk meg újabb extrémális gráf problémákat, alkalmaztuk a Regularitási Lemmát Ramsey problémákra, továbbá közönséges, ill. hipergráf extrémális problémák vizsgálatában, hipergráf Ram-

sey problémákban, másrészt a gráf-limesz-elméletbeli összefüggések tanulmányozására, végül tulajdonság-ellenőrzésre (property testing).

1. Kohayakawa, Skokan és Simonovits folytatták kutatásaikat páratlan körök Ramsey problémáira vonatkozóan [70]: ha  $n > n_0$ , akkor a 3-színű Ramsey függvény,  $R(C_n, C_n, C_n) = 4n - 3$ . Ezt kiterjesztették a diagonálison kívüli esetekre is. A cikket publikálásra leadtuk. A hozzá szükséges kétszínű, hiányos Ramsey tételt, illetve a hozzá tartozó stabilitási tételt is kidolgoztuk, publikálás alatt [71]. Továbbjutottunk Skokannal és Łuczakkal a  $k$  színnel színezett teljes gráfban a körök Ramsey tulajdonságát vizsgáltuk, amikor a színek száma tart a végtelenhez [75].
2. Korábbi, a Regularitási lemmával elért stabilitási tételeinket használtuk fel újabb, Erdős-Kleitman-Rothschild típusú de nagyon éles tételek bizonyításában, [7], [8]. Balogh, Bollobás, Saks, és Sós fontos tételeket bizonyítottak "Örökletes Gráfosztályok" növekedési rátájának lehetséges sebességére: alapjelenség hogy  $n$  méretű különböző nem-cimkézett gráfok száma nagyon kötött: vagy polinomiális vagy sokkal-sokkal nagyobb.
3. Továbbfolytattuk az Erdős-T. Sós Fa-sejtésre vonatkozó Ajtai-Komlós-Simonovits-Szemerédi eredményeket, melyek leírása igen időigényes. Emellett jelentős lépéseket tettünk a Komlós-Sós sejtés megoldásában is. három külföldi fiatal matematikussal összefogva (Jan Hladky, Diana Piguet, Maya Stein, akiknek az adott témában igen fontos korábbi eredményei folytatásán dolgozunk.)
4. Vizsgáltuk, mikor, hogyan lehet lényegében azonos szinten bizonyítani kombinatorikus eredményeket a Regularitási Lemma nélkül, mint azzal. Lásd pl. [73].

## 1.1. Fák beágyazása

Az OTKA-ban résztvevők már korábban kifejlesztettek számos módszert, amelyek alkalmasak a fabeágyazások vizsgálatára. Ezek közül kiemeljük az Erdős-T. Sós sejtés megoldását, (nagy fákra) illetve az ezzel nagyon rokon Loeb-Komlós-Sós sejtésre vonatkozó módszereket, eredményeket.

Ezek mellett ide tartozik még számos további eredményünk, pl. Szemerédi, Csaba Béla és Asif Jashmed eredménye is [17]. melyben egy Bollobás sejtés egy Komlós-Sárközy-Szemerédi általi megközelítését javítják tovább.

Ide kapcsolódnak a hipergráfokra vonatkozó fabeágyazási eredmények is.

## 1.2. Ramsey problémák, monokromatikus felbontások

Ide vonatkoznak elsősorban Szemerédi, Gyárfás, G. Sárközy és Ruszinkó, utakra és páros körökre. Kohayakawa, Skokan és Simonovits páratlán körökre vonatkozó eredményei, melyekben Regularitási Lemmát és Stabilitási módszereket kombinálunk.

## 1.3. Gráflimesz és alkalmazásai

A gráf-limesz elmélete napjainkban a kombinatorika egyik leggyorsabban fejlődő területe. Két eléggé elváló ága van: a sűrű gráfok sorozatának limeszére vonatkozó, (amelyben nagyon fontos szerepet játszottak Lovász, T. Sós, Vesztergombi, és külföldi társszerzőik) és a nagyon ritka, pontosabban a korlátos fokszámú gráfsorozatok Benjamini-Schramm elmélete. Ennek kifejlesztésében Elek Gábor és Szegedy Balázs eredményei is centrális fontosságúak. Meglepő módon mindkettőben mély analízisbeli és modell-elméleti tételeket kell felhasználni.

A kérdés: "nagy" gráfok karakterizálása, mikor hasonlít egymáshoz, mikor van közel egymáshoz két (nagy) gráf. Ezeket a kérdéseket az utóbbi években többek között különböző alkalmazások miatt igen intenzíven vizsgálják, konferenciákat, szemináriumokat szerveznek a témából.

Bizonyos értelemben az ittenivel analóg kérdések vizsgálata számelméletben kezdődött. Vizsgálták pl. hogy hogy pl. 0-1 sorozatokban kis részstrukturák (pl.  $n$ -hosszú blokkok) számából hogyan lehet következtetni a nagy strukturára, annak globalis tulajdonságaira.

Ezzel analóg kérdést vizsgálunk gráfokra. Itteni fogalmazásban hereditary gráfosztályok esetén alapjelenség itt is, hogy  $n$  méretű különböző unlabelled gráfok száma :  $f(n, P)$  lehetséges viselkedése nagyon kötött, pl vagy polinomiális nagyságrendű vagy sokkal nagyobb (legalább  $S(n)$  (a sorrend nélküli partíciók száma) (Labelled gráfokra korábban vizsgáltak, utóbbi években Balogh, Bollobás, Weinreich)

Alkalmasan értelmezve gráfokon metrikát, többféle módon konvergenciát, többek között az derül ki , hogy a "hasonloságnak" több ekvivalens értelmezése, merése lehetséges. Mindezek kapcsolatban vannak különböző statisztikus fizikában szereplő fizikai paraméterekkel (különböző energia-fogalom), multiway-max cut-tal, Szemerédi Regularitási Lemmával, property ill. parameter testing-gel stb.

## 1.4. A property testing és a Regularitási Lemma kapcsolatáról

Alon és Shapira eredményei alapján ismert, hogy a tesztelhető gráftulajdonságok lényegében ugyanazok, mint amelyek a Regularitási Partíciókból leolvashatók. Lovász, T. Sós, Vesztergombi és mások fontos szerepet játszottak ezekben a kutatásokban a gráfimeszek oldaláról.

Elek, Szegedy és Lippner a síkgráfok tulajdonságainak tesztelésében számos igen figyelemreméltó eredményt értek el. Lásd még [24].

A téma vizsgálatában mára sokan résztvesznek; volt külön konferencia (DIMACS, Moravia, Palo Alto, és most tervezik a második moráviai workshop-ot a témából). Ezeken a konferenciákon, workshop-okon a témakör legjobbjai jelentek meg, a főszervezők között többször szerepeltek OTKA-nk tagjai is.

## 1.5. Az ultraszorzatos módszer alkalmazása

A meglepő, hogy itt Elekék modelleméleti és mértékelméleti módszereket alkalmaztak. új, rövid bizonyítást találtunk a hipergráf Regularitási lemmára, a removal lemmára, az öröklődő hipergráftulajdonságok tesztelhetőségére. Általánosították a Lovász-Szegedy limesztételt hipergráfokra. Bebizonyították az első inverz counting lemmát hipergráfokra.

A módszer segítségével sikerült bizonyítani több NP-teljes kérdés konstans idejű approximációját a szubexponenciális növekedésű gráfosztályokon. Ilyen például a maximális független, a minimális lefedőrendszer, a függetlenekhez tartozó partíciófüggvény. Bebizonyították, hogy a monoton tulajdonságoktól való távolság is konstans időben tesztelhető ezeken a gráfokon.

Elek Gábor és társszerzői (elsősorban Szegedy Balázs és Lippner Gábor) a ritka gráfokra próbálták kiterjeszteni a sűrű gráfokra ismert eredményeket. Az így felmerülő problémák közismertek és elrettentőek, mégis Elekék szép eredményeket értek el ezen a területen is. Eredményeik részben a "Gyors Algoritmusok tervezése ritka gráfok paramétereinek megbecslésére" témakörre vonatkozik.

## 1.6. Klasszikus kombinatorikai eredmények

Ezek nem kapcsolódnak a fent vázolt nagy területhez, elsősorban azért, mert (gyakran) ritka gráfokra vonatkoznak. Kiemeljük a klasszikus eredmények közül Győri Ervin és környezete eredményeit, továbbá Füredi néhány cikkét. Megemlítenénk itt az Erdős-Gallai tételhez kapcsolódó eredményeiket [4],

melyben egyebek között kiterjesztették az eredeti tételt  $r$ -uniform hipergráfokra is, (Emellett, mivel az utakat és köröket hipergráfokra sok módon lehet definiálni, ennek megfelelően több éles (?) becslést is bizonyítottak.)

Füredi és Lehel megmutatták, hogy bármely  $n$ -pontú  $C_4$ -design kiegészíthető perfekt  $C_4$ -pakolássá legfeljebb kb  $\sqrt{n}$  további csúcs hozzáadásával.

Kiemelném még a hipergráfokra vonatkozó eredményeinket is, (l. pl. [44]), illetve a kocka részgráfjaira vonatkozó extrém eredményeket. Ugyancsak hipergráfok eredményeket találunk [11] cikkben is.

Győri és Palmer megoldották azt [65], hogy hány szinnel kell - nem feltétlenül jól - színezni egy gráf éleit, hogy két szomszédos pontra ülő csillagban szereplő színek halmaza különböző legyen. A pontosan meghatározott érték a kromatikus szám logaritmus, ha az több mint 2. Érdekes, hogy páros gráfokra a probléma megoldása NP-teljes.

Győri az ifjabb Katonával és Lemons-sal az utakra vonatkozó Erdős-Gallai tétel különböző uniform hipergráfokra vonatkozó általánosításait vizsgálták, bizonyos esetekben (pl. Berge utakra) bebizonyították a pontos tételt, máskor jó becsléseket adtak. A cikk benyújtás előtt áll.

A körökre vonatkozó kutatások szorosan kapcsolódnak számelméleti eredményekhez. Erdős egy régi számelméleti problémája lett megoldva [15].

Ugyancsak kiemeljük a Hamilton-gráfok  $k$  körből álló 2-faktorára vonatkozó eredményt, mely Faudree egy nehéz sejtését oldja meg.

## 2. Geometriai jellegű eredményeink:

Szép eredményeket geometriai ért el Füredi [32] háromszög-lefedésekre, illetve, egy klasszikus (Besicovich-Rado kérdéshez kapcsolódó) eredményét [47].

**Algebrai módszerek alkalmazása illeszkedési struktúrák vizsgálatában:** Újszerű eredményeket bizonyítottunk algebrai módszerekkel illeszkedési struktúrákra. Ezen belül említeném újszerű eredményeinket a három, analitikusan paraméterezett görbesereg háromszoros pontjainak számára, (Eles, Simonovits, Szabó [30]).

## 3. Nem gráf jellegű eredményeink:

Megoldottunk egy Beatty-sorozatokra vonatkozó számelméleti struktúratételt [2]

Számos kérdésre válaszolunk reziduálisan véges csoportok provéges hatásaival kapcsolatban, köztük Lubotzky and Zuk 2001-es kérdését.

Beláttuk, hogy létezik a szabadcsoporthoz olyan minimális hatása amin van két orbit-inekvivalens invariáns mérték [14].

Alkalmaztunk extrém gráfelméleti (vagy egyéb kombinatorikus módszereket) számelméletben.

Megoldottuk pl. Erdős egy régi problémáját: becsléseket adtunk olyan  $[1, n]$ -beli egész-szám-halmazok méretére, ahol semelyik  $k$  egész szorzata nem osztható egy másikkal a halmazból.

## 4. Nemzetközi elismerések:

Az eredményeinkről újra csak számtalan nemzetközi konferencián adtunk elő meghívott előadóként, gyakran plenáris előadóként. Az OTKA-ban résztvevők egyre gyakrabban vesznek részt hosszabb, fontosabb nemzetközi konferenciák, illetve tematikus szemeszterek szervezésében. Így például 2009 szeptemberétől a University of California, Los Angeles (UCLA) konferencia-centrumában (IPAM) egy igen magas szakmai szintű tematikus félév volt lényegében az itt vázolt témákból, illetve néhány idekapcsolódó témából, pl. kombinatorikus geometria, véletlen struktúrák, stb, és ennek egyik szervezője volt T. Sós Vera, hosszútávú meghívott résztvevői pl. Simonovits, és Füredi, az ennek keretében megrendezett 5 konferencián számtalan előadást tartottunk. Emellett konferencia-előadást tartottak az OTKA más résztvevői is. Lényegében munkájának elismeréseként Elek Gábort is felkérték egy magasszintű ilyen konferencia szervezésére, Stanfordban.

Elek Gábor és Szegedy Balázs, illetve Elek Gábor és Lippner Gábor a témakörbe vágó eredményeinek elismerése egyebek között Elek Gábor nagyelőadói meghívása egy fontos Chile-i kongresszusra.

Résztvettünk a Szemerédi Endre nemzetközileg kiemelkedően elismert matematikusunk (az OTKA tagja is) 70. születésnapjára rendezett konferenciának megszervezésében, az iskolateremtő Sós Vera 80. születésnapjára rendezendő nemzetközi konferencia megrendezésében. Ezeken részben előadásokkal is szerepeltünk. A nemzetközileg is kiemelkedő Szemerédi konferencia nemzetközileg is egy kiemelkedő teljesítménye volt a magyar kombinatorikus társadalomnak: kb. 350-en jöttek el, dacára, hogy előadásokat csak meghívásos alapon fogadtunk el.

---

Végül megemlíti Szemerédi Endre akadémikus számtalan az adott periódusra eső elismerését, Schock Prize, Steele Prize, és beválasztását az Amerikai Tudományos Akadémia rendes tagjának.

## Irodalom

- [1] Abért, Miklós, Gábor Elek: Dynamical properties of profinite actions, (30 oldal) to appear in *Ergodic Theory and Dynamical Systems* (2011) (see also ArXiv:1005.3188v3)
- [2] Artstein-Avidan, Shiri; Fraenkel, Aviezri S.; Sós, Vera T. A two-parameter family of an extension of Beatty sequences. *Discrete Math.* 308 (2008), no. 20, 4578–4588, 05B45 (91A46)
- [3] Balister, P. N.; Győri, E.; Lehel, J.; Schelp, R. H.: Adjacent vertex distinguishing edge-colorings. *SIAM J. Discrete Math.* 21 (2007), no. 1, 237–250 (electronic).
- [4] Balister, P. N.; Győri, E.; Lehel, J.; Schelp, R. H.: Connected graphs without long paths. *Discrete Math.* 308 (2008), no. 19, 4487–4494.  
The extremal number and graph is determined if a connected graph does not contain a path of length  $k$ .
- [5] Balister, P. N.; Győri, E.; Schelp, R. H.: Coloring vertices and edges of a graph by nonempty subsets of a set. *European J. Combin.* 32 (2011), no. 4, 533–537.
- [6] Balogh, József; Bollobás, Béla; Saks, Michael; Sós, Vera T.: The unlabelled speed of a hereditary graph property. *J. Combin. Theory Ser. B* 99 (2009), no. 1, 9–19.
- [7] Balogh, József; Bollobás, Béla; Simonovits, Miklós: The typical structure of graphs without given excluded subgraphs. *Random Structures Algorithms* 34 (2009), no. 3, 305–318.
- [8] Balogh, József; Bollobás, Béla; Simonovits, Miklós: The fine structure of octahedron-free graphs. *J. Combin. Theory Ser. B* 101 (2011), no. 2, 67–84,
- [9] Blokhuis, A.; Brouwer, A. E.; Chowdhury, A.; Frankl, P.; Mussche, T.; Patkós, B.; Szőnyi, T.: A Hilton-Milner theorem for vector spaces. *Electron. J. Combin.* 17 (2010), no. 1, Research Paper 71, 12 pp.
- [10] A. Blokhuis, J. Doumen, Z. Füredi, and H. Wilbrink: Embedding posets in posets of bounded outdegree. (to appear)



- [11] Bollobás, Béla; Győri, Ervin: Pentagons vs. triangles. *Discrete Math.* 308 (2008), no. 19, 4332–4336.  
The authors estimate the number of triangles in pentagon-free graphs, and the number of hyperedges in pentagon-free 3-uniform hypergraphs. In both cases the order of magnitude is determined, but the constant coefficient is not determined yet.
- [12] Borgs, Christian, Chayes, Jennifer, Lovász, László, Sós, Vera, Vesztergombi, Kati: Limits of randomly growing graph sequences, *European Journal of Combinatorics*
- [13] Borgs, C.; Chayes, J. T.; Lovász, L.; Sós, V. T.; Vesztergombi, K. Convergent sequences of dense graphs. I. Subgraph frequencies, metric properties and testing. *Adv. Math.* 219 (2008), no. 6, 1801–1851.
- [14] Ceccherini-Silberstein, Tullio; Elek, Gábor: Minimal topological actions do not determine the measurable orbit equivalence class. *Groups Geom. Dyn.* 2 (2008), no. 2, 139–163.
- [15] Chan, Tsz Ho; Győri, Ervin; Sárközy, András: On a problem of Erdős on integers, none of which divides the product of  $k$  others. *European J. Combin.* 31 (2010), no. 1, 260–269.
- [16] Chowdhury, Ameera; Patkós, Balázs: Shadows and intersections in vector spaces. *J. Combin. Theory Ser. A* 117 (2010), no. 8, 1095–1106.
- [17] Csaba, Béla, Jamshed, Asif, Szemerédi, Endre: Embedding spanning trees, submitted to CPC
- [18] B. Csaba, I. Levitt, J. Nagy-Gyorgy, and E. Szemerédi. Tight bounds for embedding bounded degree trees. *Bolyai Society Mathematical Studies*, X.(2010), Fete of Combinatorics, pp. 1-44.
- [19] Eaton, Nancy; Füredi, Zoltán; Kostochka, Alexandr V.; Skokan, Jozef: Tree representations of graphs. *European J. Combin.* 28 (2007), no. 4, 1087–1098.
- [20] Elek, Gábor: On limits of finite graphs. *Combinatorica* 27 (2007), no. 4, 503–507.
- [21] Elek, Gábor: The combinatorial cost. *Enseign. Math.* (2) 53 (2007), no. 3-4, 225–235.

- [22] Elek, Gábor: Weak convergence of finite graphs, integrated density of states and a Cheeger type inequality. J. Combin. Theory Ser. B 98 (2008), no. 1, 62–68, 05C50  
A limeszobjektum módszer segítségével sikerült Cheeger típusú egyenlőtlenségeket bizonyitanom a korlátos fokú gráfosztályban.
- [23] Elek, Gábor:  $L^2$ -spectral invariants and convergent sequences of finite graphs. J. Funct. Anal. 254 (2008), no. 10, 2667–2689.  
Lenz és Stollmann bizonyította be, hogy a Penrose tiling gráfokon az integrated density of states egyenletesen létezik. Ez az eredmény addig csak periodikus struktúrákon volt ismert. A limeszobjektum módszerrel kiterjesztettem eredményüket a lehető legszélesebb gráfosztályra.
- [24] Elek Gábor: Parameter testing in bounded degree graphs of subexponential growth, Random Structures and Algorithms, vol 37/2 pp 248–270.  
A cikkben sikerült belátni gráflimeszek segítségével, hogy két hasonló statisztikájú mérsékelt növekedésű gráf hasonló módon particionálható. Ennek következménye, hogy ezen az osztályon a függetlenségi szám, a partició függvények, a véletlen Schrödinger operátorok spektruma tesztelhető konstans időben.
- [25] Elek, Gábor: On the limit of large girth graph sequences. Combinatorica 30 (2010), no. 5, 553–563.
- [26] Gábor Elek: Connes Embeddings and von Neumann regular closures of group algebras. (submitted)  
Ultraszorzatok segítségével sikerült belátnom a Lück Approximációs tétel egy struktúrális verzióját amenábilis csoportokra.
- [27] Elek, Gábor; Lippner, Gábor: Borel oracles. An analytical approach to constant-time algorithms. Proc. Amer. Math. Soc. 138 (2010), no. 8, 2939–2947.  
A Borel Oracle módszer gráflimeszek használatát jelenti, konstans-idejű illetve random lokális algoritmusok létezésének bizonyítására. A cikkben azt láttuk be, hogy létezik konstans idejű algoritmus a maximális matching becslésére.
- [28] Elek, Gábor; Lippner, Gábor: Sofic equivalence relations. J. Funct. Anal. 258 (1) (2010), no. 5, 1692–1708.

Bevezettük a szofikus ekvivalenciareláció fogalmát, és bebizonyítottuk, hogy ezekre mind a Connes sejtés mind a Determináns sejtés teljesül. Beláttuk, hogy minden treeable reláció szofik.

- [29] Elek, Gábor, Szegedy, Balázs: A measure-theoretic approach to the theory of dense hypergraphs. (közlésre benyújtva)  
 Modelleméleti és mértékelméleti módszerek segítségével új, rövid bizonyítást találtunk a hipergráf regularitási lemmára, a removal lemmára, az öröklődő hipergráftulajdonságok tesztelhetőségére. Általánosítottuk a Lovász-Szegedy limesztételt hipergráfokra. Bebizonyítottuk az első inverz counting lemmát hipergráfokra.
- [30] Elekes, György; Simonovits, Miklós; Szabó, Endre: A combinatorial distinction between unit circles and straight lines: how many coincidences can they have? *Combin. Probab. Comput.* 18 (2009), no. 5, 691–705.
- [31] Flandrin, Evelyne; Győri, Ervin; Li, Hao; Shu, Jinlong: Cyclability in  $k$ -connected  $K_{1,4}$ -free graphs. *Discrete Math.* 310 (2010), no. 20, 2735–2741.
- [32] Füredi, Zoltán: Covering a triangle with positive and negative homothetic copies. *Discrete Comput. Geom.* 38 (2007), no. 2, 273–288.
- [33] Füredi, Zoltán; Gyárfás, András; Sárközy, Gábor N.; Selkow, Stanley: Inequalities for the first-fit chromatic number. *J. Graph Theory* 59 (2008), no. 1, 75–88.
- [34] Füredi, Zoltán; Győri, Ervin; Pach, János; Sali, Attila: Guest editors' foreword [Special issue: Simonovits '06]. *Discrete Math.* 308 (2008), no. 19, 4305, 05-06
- [35] Füredi, Z.; Kang, J.-H.: Covering the  $n$ -space by convex bodies and its chromatic number. *Discrete Math.* 308 (2008), no. 19, 4495–4500.
- [36] Füredi, Zoltán; Kantor, Ida List: colorings with distinct list sizes, the case of complete bipartite graphs. *European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications (EuroComb 2009)*, 323–327, *Electron. Notes Discrete Math.*, 34, Elsevier Sci. B. V., Amsterdam, 2009.
- [37] Füredi, Zoltan; Kantor, Ida; Monti, Angelo; Sinairi, Blerina: On reverse-free codes and permutations. *SIAM J. Discrete Math.* 24 (2010), no. 3, 964–978.

- [38] Füredi, Zoltán; Lehel, Jenő: Tight embeddings of partial quadrilateral packings. *J. Combin. Theory Ser. A* 117 (2010), no. 4, 466–474.

—

Beagyazasi tetelek természetesen merulnek fel a design-ok konstrualasakor, a Hanani modszere'n alapulo Wilson fele bizonyitasnak is ez az egyik kritikus lepese. A szerzok azt latjak be, hogy barmely  $n$ -pontu  $C_4$ -design (vagyis negy hosszú korok eldiszjunkt rendszere) kiegészitheto egy perfekt  $C_4$ -pakolassa legfeljebb kb  $\sqrt{n}$  további csucs hozzaadasaval. Ez aszimptotikusan eles es az elso olyan eredmény amely szublinearis.

Nem tudom megallni h ne idezzek a lektori velemenyekbol:

1. The result represents a substantial improvement on numerous old and recent related results. ... All together, this is an excellent paper.
2. This is a fabulous result and should be published without quantification.

- [39] Füredi, Zoltan; Mubayi, Dhruv; Pikhurko, Oleg: Quadruple systems with independent neighborhoods. *J. Combin. Theory Ser. A* 115 (2008), no. 8, 1552–1560.

- [40] Füredi, Zoltán; Özkahya, Lale: On even-cycle-free subgraphs of the hypercube. *European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications (EuroComb 2009)*, 515–517, *Electron. Notes Discrete Math.*, 34, Elsevier Sci. B. V., Amsterdam, 2009.

- [41] Z. Füredi and L. Özkahya: On even-cycle-free subgraphs of the hypercube. *J. Combin. Theory Ser. A* 118 (2011), no. 6, 1816–1819,

- [42] Füredi, Zoltán; Özkahya, Lale: Unavoidable subhypergraphs: **a**-clusters. *European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications (EuroComb 2009)*, 63–67, *Electron. Notes Discrete Math.*, 34, Elsevier Sci. B. V., Amsterdam, 2009. 05C65

A kombinatorika egyik kozponti problemaja a kulonfele strukturak reszhipergrafokkal valo jellemzese. Ebbe a tetelkorbe illeszkedik a Turan problema. Legyen  $a = (a_1, \dots, a_p)$  egy pozitiv egeszekbol allo sorozat,  $k = a_1 + \dots + a_p$ . Az  $A = \{F_0, F_1, \dots, F_p\}$  hipergraf egy **a**-cluster ha minden tagja  $k$ -elemu, es a  $F_1 - F_0, \dots, F_p - F_0$  tovabba az  $F_0 - F_1, \dots, F_0 - F_p$  paronkent diszjunktak, vegul minden  $i$ -re  $|F_i - F_0| = |F_0 - F_i| = a_i$ . A-nak  $2k$  pontja van es izomorfizmus erejeig egyertelmu.

A delta-rendszer-modszer intenzív alkalmazásával belátjuk, hogy ha  $k > p$  és az  $n$  elég nagy, akkor egy  $n$ -pontú  $A$ -mentes  $F$   $k$ -uniform halmazrendszer nagyság legfeljebb az Erdős-Ko-Rado határ, azaz  $\binom{n-1}{k-1}$ .

- [43] Z. Füredi and L. Özkahya: Unavoidable subhypergraphs:  $\mathbf{a}$ -clusters, *J. Combin. Th., Ser. A*, accepted

- [44] Füredi, Zoltán; Özkahya, Lale: On 14-cycle-free subgraphs of the hypercube. *Combin. Probab. Comput.* 18 (2009), no. 5, 725–729.

Valaszolva Erdős és Chung egy kérdésére belátjuk, hogy az  $n$ -dimenziós hiperkocka eleinek bármely pozitív százaléka tartalmaz 14 hosszú kort. Ez elesíti Alon et al. egy Ramsey eredményét, és az első lényeges tovább lépés a Turán tételkor hiperkockára való kiterjesztése irányában.

- [45] Füredi, Zoltán; Ruszinkó, Miklós: Large convex cones in hypercubes. *Discrete Appl. Math.* 156 (2008), no. 9, 1536–1541.

- [46] Füredi, Zoltán; Sali, Attila: Partition critical hypergraphs. *European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications (Euro-Comb 2009)*, 573–577, *Electron. Notes Discrete Math.*, 34, Elsevier Sci. B. V., Amsterdam, 2009.

- [47] Z. Füredi and J. Wetzel: Covers for closed arcs of length two, *Periodica Math. Hungar.* (to appear)

Egy síkbeli  $X$  halmaz az  $A$  halmazcsaládot lefedti, ha bármely  $A$ -beli halmazhoz van azzal egybevágó  $X$ -beli részhalmaz. Pl. Besicovitch and Rado (1969) konstruáltak egy nullmértékű halmazt, amely tartalmaz minden sugarú körivet. Marstrand (1972) adott egy nullmértékű halmazt, amely tartalmazza minden véges torotvonal eltöltjét.

Itt azt a legkisebb  $\mathbf{a}$  területű  $k$  o n v e x fedőhalmazt keressük, amely tartalmaz minden  $k$  hosszú zárt görbét. A 37 éves becslést  $0.385 < \mathbf{a} < 0.491$ , alaposan megjavítjuk  $0.386 < \mathbf{a} < 0.449$ .

- [48] Gerbner, Dániel; Keszegh, Balázs; Lemons, Nathan; Palmer, Cory; Pálvolgyi, Dömötör; Patkós, Balázs: Polychromatic colorings of arbitrary rectangular partitions. *Discrete Math.* 310 (2010), no. 1, 21–30.

- [49] Gerbner, D., Nathan Lemons, Cory Palmer, Balázs Patkós, Vajk Szécsi, Almost intersecting families of sets, submitted

Az első cikkben olyan  $\mathcal{F}$  halmazrendszereket vizsgáltunk, melyekben minden halmazhoz pontosan  $l$  (vagy legfeljebb  $l$ ) másik tőle diszjunkt  $\mathcal{F}$ -beli halmaz létezik. Ez a definíció  $l = 0$  esetben a metsző halmazrendszer

jól ismert fogalmát adja. Mivel külön vizsgáltuk azon eseteket, amikor  $\mathcal{F}$  uniform illetve nem-uniform, így összesen 4 problémát kaptunk minden  $l$  esetén, melyek mind igen különbözőek egymástól mind a sejtett választ, mind az alkalmazott módszereket tekintve. Általában az  $l = 1, 2$  esetben sikerült pontos korlátot adnunk az ilyen tulajdonsággal rendelkező halmazrendszerek maximális méretére, nagyobb  $l$  értékekre sejtéseket fogalmaztunk meg.

- [50] Gerbner, D., Nathan Lemons, Cory Palmer, Balázs Patkós, Vajk Szécsi: Cross-Sperner families, Submitted  
A második cikk olyan  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  halmazrendszerpárokkal foglalkozik, melyekben nincs olyan  $F \in \mathcal{F}, G \in \mathcal{G}$  pár, melyre  $F \subseteq G$  vagy  $G \subseteq F$  teljesülne. A metsző halmazrendszerek hasonló módon való általánosítása egy régóta kutatott fogalom, a Sperner-rendszerek kapcsán azonban még nem találtunk az irodalomban hasonlót. A cikkben meghatározzuk, hogy az ilyen tulajdonságokkal rendelkező halmazrendszerpárok közül melyekre lesz maximális  $|\mathcal{F}| \cdot |\mathcal{G}|$  illetve  $|\mathcal{F}| + |\mathcal{G}|$ .
- [51] Gerbner, Dániel; Pálvölgyi, Dömötör; Patkós, Balázs; Wiener, Gábor: Finding the maximum and minimum elements with one lie. Discrete Appl. Math. 158 (2010), no. 9, 988–995.
- [52] Gerbner, Dániel; Patkós, Balázs:  $l$ -chain profile vectors. SIAM J. Discrete Math. 22 (2008), no. 1, 185–193.
- [53] Gerbner, Dániel; Patkós, Balázs: Profile vectors in the lattice of subspaces. Discrete Math. 309 (2009), no. 9, 2861–2869.
- [54] Gyárfás, András; Sárközy, Gábor N.; Szemerédi, Endre: Stability of the path-path Ramsey number. Discrete Math. 309 (2009), no. 13, 4590–4595.
- [55] Gyárfás, András; Sárközy, Gábor N.; Szemerédi, Endre: The Ramsey number of diamond-matchings and loose cycles in hypergraphs. Electron. J. Combin. 15 (2008), no. 1, Research Paper 126, 14 pp.
- [56] Gyárfás, András; Ruszinkó, Miklós; Sárközy, Gábor N.; Szemerédi, Endre: Tripartite Ramsey numbers for paths. J. Graph Theory 55 (2007), no. 2, 164–174.
- [57] Gyárfás, András; Ruszinkó, Miklós; Sárközy, Gábor N.; Szemerédi, Endre: Three-color Ramsey numbers for paths. Combinatorica 27 (2007), no. 1, 35–69.

- [58] Gyárfás, András; Ruszinkó, Miklós; Sárközy, Gábor N.; Szemerédi, Endre Corrigendum: "Three-color Ramsey numbers for paths" [Combinatorica 27 (2007), no. 1, 35–69; Combinatorica 28 (2008), no. 4, 499–502.
  - [59] Gyárfás, András; Ruszinkó, Miklós; Sárközy, Gábor N.; Szemerédi, Endre: Partitioning 3-colored complete graphs into three monochromatic cycles. *Electron. J. Combin.* 18 (2011), no. 1, Paper 53, 16 pp,
  - [60] Gyárfás, András; Sárközy, Gábor N.; Szemerédi, Endre: Monochromatic matchings in the shadow graph of almost complete hypergraphs. *Ann. Comb.* 14 (2010), no. 2, 245–249.
  - [61] Gyárfás, András; Sárközy, Gábor N.; Szemerédi, Endre: Monochromatic Hamiltonian 3-tight Berge cycles in 2-colored 4-uniform hypergraphs. *J. Graph Theory* 63 (2010), no. 4, 288–299.
  - [62] Gyárfás, András; Sárközy, Gábor N.; Szemerédi, Endre: Long monochromatic Berge cycles in colored 4-uniform hypergraphs. *Graphs Combin.* 26 (2010), no. 1, 71–76.
  - [63] Győri, Ervin; Hornák, Mirko; Palmer, Cory; Wozniak, Mariusz: General neighbour-distinguishing index of a graph. *Discrete Math.* 308 (2008), no. 5-6, 827–831.
- The authors estimate how many colors are needed to color the edges of a graph (not necessarily properly) so that the set of colors of the edges incident to the vertices are distinct for any two adjacent vertices. Later Győri and Palmer determined the number precisely.
- [64] Győri, Ervin; Lemons, Nathan: Hypergraphs with no odd cycle of given length. *European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications (EuroComb 2009)*, 359–362, *Electron. Notes Discrete Math.*, 34, Elsevier Sci. B. V., Amsterdam, 2009.
  - [65] Győri, Ervin; Palmer, Cory: A new type of edge-derived vertex coloring. *Discrete Math.* 309 (2009), no. 22, 6344–6352.
  - [66] Jan Hladky, Janos Komlos, Diana Piguet, Miklos Simonovits, Maya Stein, and Endre Szemerédi: An approximate version of the Loeb-Komlos-Sos Conjecture II. in manuscript.
  - [67] Jamshed, Asif, Szemerédi, Endre: Proof of the Pósa-Seymour conjecture, Submitted to *Annals of Combinatorics*

- [68] Kierstead, Henry A.; Kostochka, Alexandr V.; Mydlarz, Marcelo; Szemerédi, Endre: A fast algorithm for equitable coloring. *Combinatorica* 30 (2010), no. 2, 217–224.
- [69] Kohayakawa, Yoshiharu; Rödl, Vojtech; Schacht, Mathias; Szemerédi, Endre: Sparse partition universal graphs for graphs of bounded degree. *Adv. Math.* 226 (2011), no. 6, 5041–5065.
- [70] Kohayakawa, Yoshi, Simonovits, Miklós, Skokan, Jozef: The three-coloured Ramsey-number of odd cycles, submitted
- [71] Kohayakawa, Yoshi, Simonovits, Miklós, Skokan, Jozef: Stability of the Ramsey Numbers for Cycles, manuscript
- [72] Krivelevich, Michael; Patkós, Balázs: Equitable coloring of random graphs. *Random Structures Algorithms* 35 (2009), no. 1, 83–99.
- [73] Levitt, Ian; Sárközy, Gábor N.; Szemerédi, Endre: How to avoid using the regularity lemma: Pósa’s conjecture revisited. *Discrete Math.* 310 (2010), no. 3, 630–641.
- [74] Lovász, László; Sós, Vera T. Generalized quasirandom graphs. *J. Combin. Theory Ser. B* 98 (2008), no. 1, 146–163.
- [75] Łuczak, T., Skokan, J., Simonovits, Miklós, to appear in *Journal of Graph Theory* Article first published online: 16 JAN 2011
- [76] Łuczak, Tomasz; Simonovits, Miklós: On the minimum degree forcing  $F$ -free graphs to be (nearly) bipartite. *Discrete Math.* 308 (2008), no. 17, 3998–4002.
- [77] Martin, Ryan; Szemerédi, Endre: Quadripartite version of the Hajnal-Szemerédi theorem. *Discrete Math.* 308 (2008), no. 19, 4337–4360.
- [78] Nguyen, Hoi H.; Szemerédi, Endre; Vu, Van H.: Subset sums modulo a prime. *Acta Arith.* 131 (2008), no. 4, 303–316.
- [79] Patkós, Balázs: On randomly generated non-trivially intersecting hypergraphs. *Electron. J. Combin.* 17 (2010), no. 1, Research Paper 26, 20 pp.
- [80] Patkós, Balázs: The distance of  $\mathcal{FF}$ -free hypergraphs. *Studia Sci. Math. Hungar.* 46 (2009), no. 2, 275–286.



- [81] Patkós, Balázs:  $l$ -trace  $k$ -Sperner families of sets. J. Combin. Theory Ser. A 116 (2009), no. 5, 1047–1055.
- [82] Patkós, Balázs: Traces of uniform families of sets. Electron. J. Combin. 16 (2009), no. 1, Note 8, 5 pp.
- [83] Patkós, Balázs; Tichler, Krisztián; Wiener, Gábor Inclusionwise minimal completely separating systems. J. Stat. Theory Pract. 3 (2009), no. 2, 455–462, Database Expansion Item
- [84] Rödl, Wojtech; Ruciński, Andrzej; Szemerédi, Endre: Perfect matchings in large uniform hypergraphs with large minimum collective degree. J. Combin. Theory Ser. A 116 (2009), no. 3, 613–636.
- [85] V. Rödl, A. Rucinski, and E. Szemerédi, Dirac-type conditions for hamiltonian paths and cycles in 3-uniform hypergraphs, Advances in Mathematics, 227 (2011), no. 3, 1225–1299.
- [86] Rödl, Wojtech; Ruciński, Andrzej; Szemerédi, Endre: An approximate Dirac-type theorem for  $kk$ -uniform hypergraphs. Combinatorica 28 (2008), no. 2, 229–260.
- [87] Rödl, Wojtech; Ruciński, Andrzej; Schacht, Mathias; Szemerédi, Endre: A note on perfect matchings in uniform hypergraphs with large minimum collective degree. Comment. Math. Univ. Carolin. 49 (2008), no. 4, 633–636.
- [88] Sarmad Abbasi, Imdadullah Khan, Gábor Sárközy, and Endre Szemerédi: A de-regularized" proof of the El-Zahar Conjecture for Large Graphs. submitted to Journal of Combinatorial Theory B.
- [89] Simonovits, Miklós; Szabó, Endre: Gyuri Elekes and the incidences. Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. 52 (2009), 53–73 (2010)
- [90] Simonovits, Miklós and Szabó, Endre: Elekes Gyuri és az illeszkedések, Mat. Lapok, 2009/2, 18–34.
- [91] Simonovits, Miklós: Personal reminiscences, Gyuri Elekes. Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. 52 (2009), 25–30.
- [92] Szemerédi, Endre: An old new proof of Roth's theorem. Additive combinatorics, 51–54, CRM Proc. Lecture Notes, 43, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.